

**Continuité en un point**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel élément de  $I$ .

$f$  est continue en  $a$  si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) : \text{C'est-à-dire :}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 \leq |x - a| < \alpha \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Continuité à droite et à gauche**

1) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à droite de  $a$  si elle admet une limite finie à droite en  $a$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) :$$

2) Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r; a]$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à gauche de  $a$  si elle admet une limite finie à gauche en  $a$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

3) Une fonction est continue en un point  $a$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de  $a$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$  ssi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

**Continuité sur un intervalle**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$f$  est continue sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continue en chaque réel  $a$  de  $I$ .

Les fonctions continues sont les fonctions dont le graphe « se trace sans lever le crayon ».

**Prolongement par continuité**

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est

$D_f$  ;  $a$  un réel tel que  $a \notin D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  (finie)

$$\text{La fonction } f \text{ définie par : } \begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$$

Est une fonction continue en  $a$  et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $a$

**Exemples de fonctions continues**

- les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$  ;
- les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition •
- les fonctions exponentielles sont continues sur  $\mathbb{R}$  ;

- les fonctions logarithme népérien et logarithme décimal sont continues sur  $]0, +\infty [$  ;
- les fonctions racines  $n$ -ème sont continues sur  $[0, +\infty [$  ;
- les fonctions sinus et cosinus sont continues sur  $\mathbb{R}$ , la fonction tangente est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de la forme  $\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- la fonction valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de ces fonctions de référence sont aussi continues sur leur domaine de définition.
- La fonction partie entière est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et discontinue en certains réels (et donc non continue sur  $\mathbb{R}$ ).

**Opérations sur les fonctions continues**

1) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  alors

$$\text{:a) } f + g \quad \text{b) } f \times g \quad \text{c) } |f|$$

Sont des fonctions continues en  $a$

2) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$

$$\text{et } g(a) \neq 0 \text{ alors : a) } \frac{1}{g} \quad \text{b) } \frac{f}{g} \text{ sont des fonctions}$$

continues en  $a$ .

3) Si  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f(a) \geq 0$  alors :

$$\sqrt{f} \text{ est continue en } a$$

**Image d'un intervalle.**

1) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

2) si  $f$  continue et strictement croissante sur

L'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f(]a; b]) = \left[ f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right[$$

$$f(]a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b) \right[ \text{ et } f([a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right[$$

3)  $f$  continue et strictement décroissante sur

L'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)] \text{ et } f(]a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a) \right[$$

$$f(]a; b]) = \left] f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right[ \text{ et } f([a; b]) = \left] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x) \right[$$

**Théorème des valeurs intermédiaires**

1) Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ ,

il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$ .

2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .  
Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ ,  
L'équation  $f(x) = k$  a une solution unique dans  $[a, b]$ .  
Ces résultats se généralisent à des intervalles du type  $[a, b[$ ,  $]a, b]$ ,  $]a, b[$ ,  $[a, +\infty[$ ,  $] - \infty, b[$ , ... en remplaçant  $f(a)$  ou  $f(b)$  par la limite de  $f$  en la borne manquante.

3) Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $[a, b]$ . Si  $f(a)f(b) < 0$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique dans  $[a, b]$ .

### FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Soit  $f$  une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , On a  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .

2) Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $f^{-1}$  à la même monotonie sur  $J$  que celle de  $f$  sur  $I$ .

3) Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à  $(\Delta) y = x$

### La fonction racine $n$ - éme

1) Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ ; la fonction  $f : x \rightarrow x^n$  est une fonction continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  elle admet donc une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$  et La fonction réciproque  $f^{-1}$  s'appelle la fonction racine  $n$  - éme et se note  $\sqrt[n]{x}$

### Propriétés de la racine $n$ - éme

- 1) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$
- 2)  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \sqrt[n]{x} \geq 0$
- 3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- 4) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  strictement croissante.
- 5)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- 6)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$
- 7)  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$
- 8)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- 9)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$  10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- 11) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- 12) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$  et  $l \geq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

$$13) \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \text{ et } x^r = x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p \quad q \in \mathbb{N}^* \text{ et } p \in \mathbb{Z}$$

### L'expression conjuguai et ses applications

On sait que  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

et  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$  Il en résulte :

$$a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Par suite  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

On sait que  $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Par suite  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

### La fonction arctangente :

1) La restriction de la fonction  $\tan$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  est une bijection de  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  Vers  $\mathbb{R}$ .

Sa bijection réciproque s'appelle la fonction arc tangente, notée : **artan** elle est définie de  $\mathbb{R}$  vers

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ : \begin{cases} \text{artan } x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \end{cases}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{artan } x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{artan } x = -\frac{\pi}{2}$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R})(\tan(\text{artan } x) = x)$$

$$\text{et } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{artan}(\tan x) = x$$

4) La fonction **artan** est continue et impaire strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$$5) \text{artan } x = \text{artan } y \Leftrightarrow x = y \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{artan } x < \text{artan } y \Leftrightarrow x < y \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{artan } x}{x} = 1$$

$$7) (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\text{artan } x + \text{artan } (1/x) = \pi/2)$$

$$\text{et } (\forall x \in \mathbb{R}^-) (\text{artan } x + \text{artan } (1/x) = -\pi/2)$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

